09 1991

5 3 8

ТУ-19-241-82

5

1


студия
ДИАФИЛЬМ

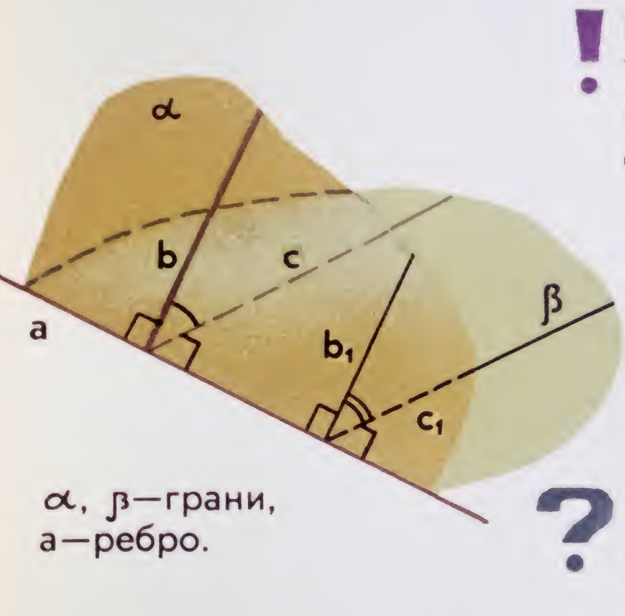
07—3—039

МНОГОГРАННИКИ И ИХ ОБЪЕМЫ



Диафильм по математике для X класса

Двугранный угол.



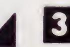
α, β — грани,
a — ребро.

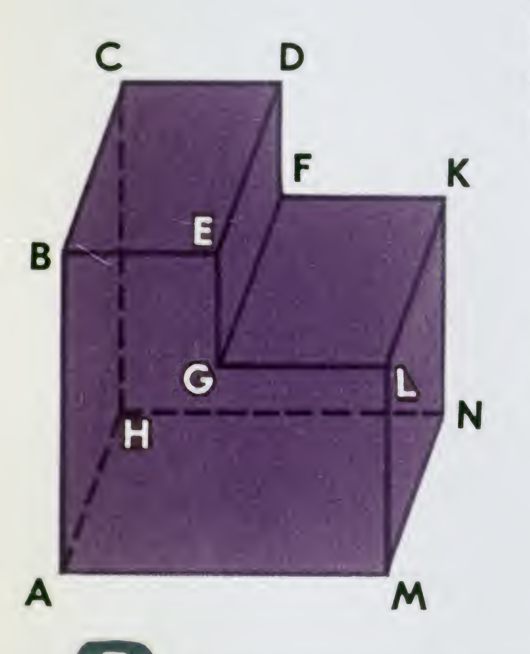
! Если $b \subset \alpha$, $b \perp a$, $c \subset \beta$, $c \perp a$, то (bc) — линейный угол. Его мера называется мерой двугранного угла.

? Объясните, почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла (если $b_1 \subset \alpha$, $b_1 \perp a$, $c_1 \subset \beta$, $c_1 \perp a$, то $\angle(b_1c_1) = \angle(bc)$).

Трехгранный угол (abc).
(ab), (bc), (ac)—грани,
a, b, c—ребра,
S—вершина.

Подумайте, как можно дать определение четырехгранного угла; пятигранного угла.

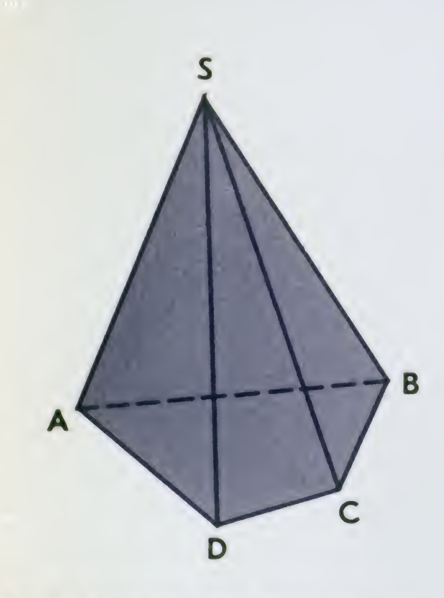




Это тело — **многогранник:** его поверхность состоит из конечного числа многоугольников.

! Многогранник называется **выпуклым,** если он лежит по одну сторону плоскости каждого из многоугольников на его поверхности.

? А является ли этот многогранник выпуклым?



Назовите вершины, ребра, грани изображенного многогранника. Является ли он выпуклым?

Какие многогранники есть на этом рисунке?

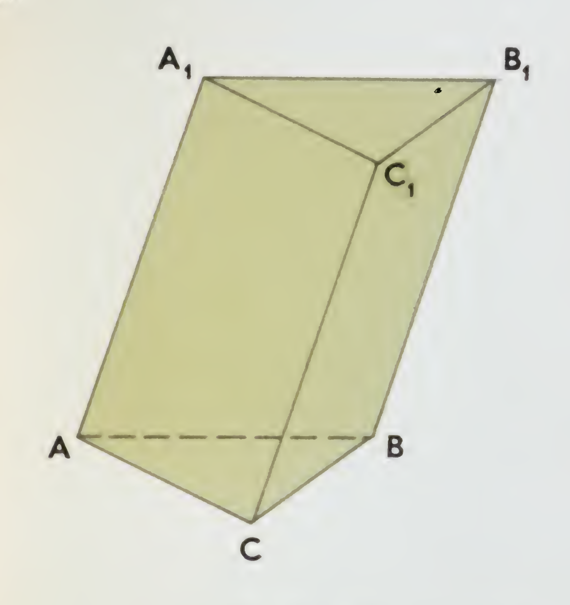
ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

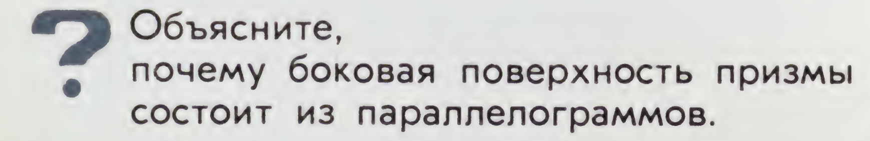
Призма—это многогранник, состоящий из двух многоугольников **(оснований)**, совмещающихся параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки оснований.



Докажите, что у призмы:

1) основания равны и лежат в параллельных плоскостях;
2) боковые ребра параллельны и равны.





Объясните,
почему боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов.

Высота призмы — расстояние между плоскостями оснований. **Диагональ** призмы соединяет две вершины, не лежащие в одной грани. **Диагональное сечение** призмы проходит через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.

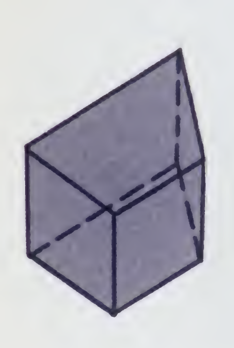
$O \in \alpha$,

$O_1 \in \beta$,

$OO_1 \perp \beta$

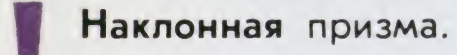
Докажите, что OO_1 — высота данной призмы; назовите диагонали и диагональные сечения.

Прямые призмы: боковые ребра перпендикулярны основаниям.





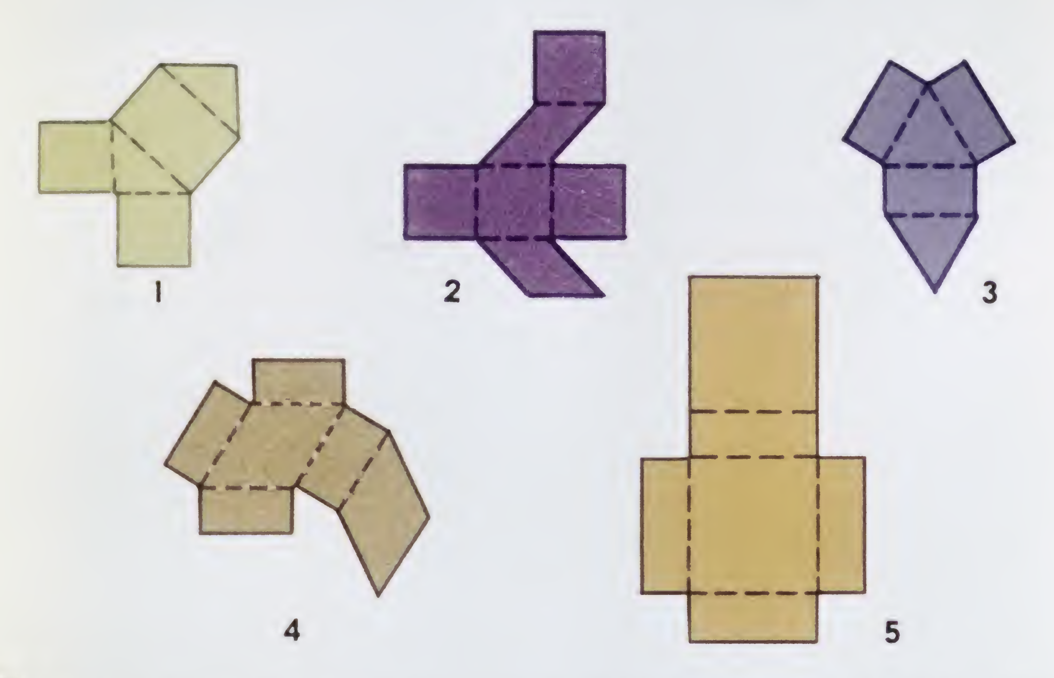
Правильная призма: основания—правильные многоугольники.



Наклонная призма.

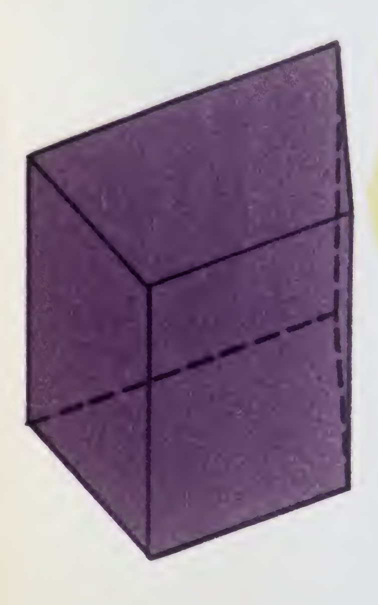


Докажите, что в прямой призме боковые ребра равны высоте.



Какие многоугольники на рисунке служат развертками 1) прямых призм; 2) правильных призм?

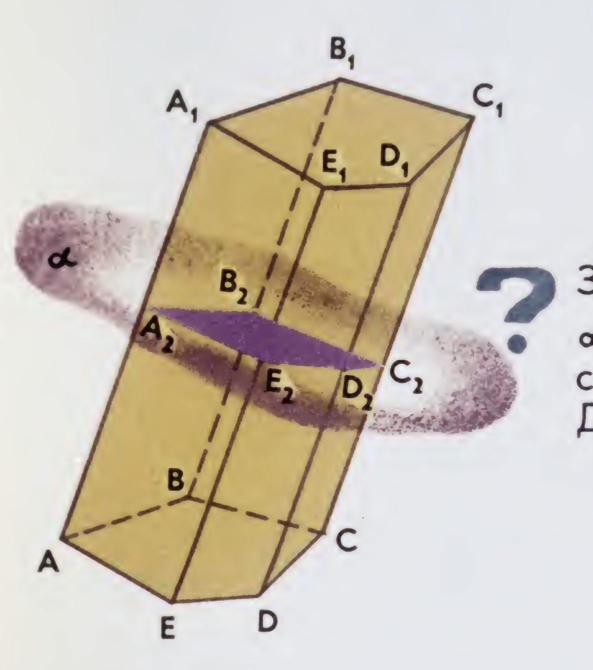
ТЕОРЕМА. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра (P) основания на высоту (h) призмы.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

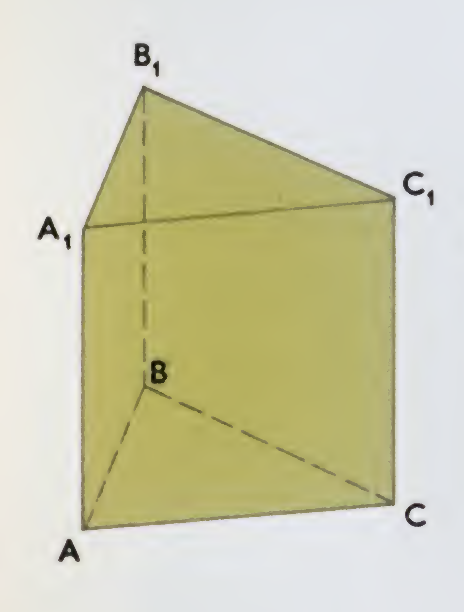
1. Боковые грани— ... .
2. Боковые ребра равны ... .
3. Площадь боковой грани равна ... .
4. Боковая поверхность равна ... .

Закончите доказательство.



ЗАДАЧА.

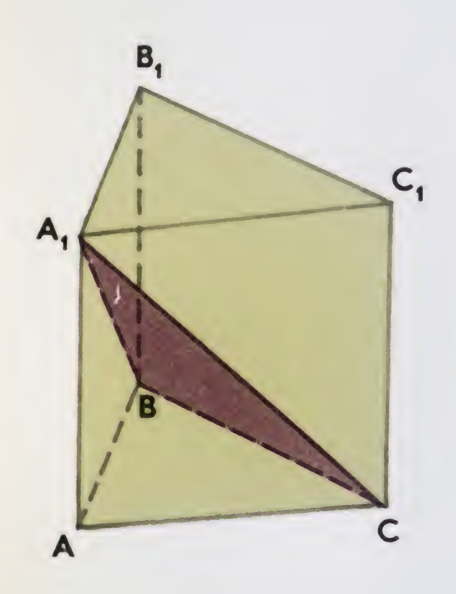
$\alpha \perp AA_1$. P — периметр сечения $A_2B_2C_2D_2E_2$. Докажите, что $S_{бок.} = AA_1 \cdot P$.



?

ЗАДАЧА.

Постройте сечение данной призмы, проходящее через ребро BC и вершину A_1.

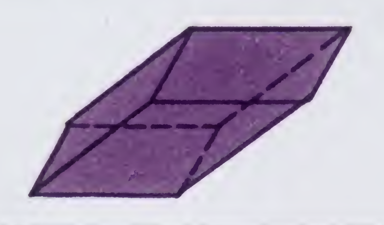


ПРОВЕРЬТЕ СВОЕ РЕШЕНИЕ.

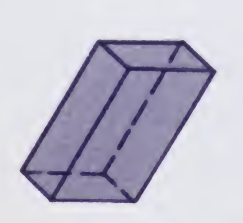
1. Проведем прямую BA_1 в плоскости A_1B_1BA.
2. Проведем прямую CA_1 в плоскости A_1C_1CA.
3. $\triangle A_1BC$ — искомое сечение.

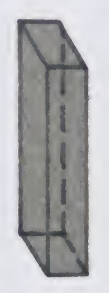
ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Параллелепипедом называется призма, основания которой—параллелограммы.









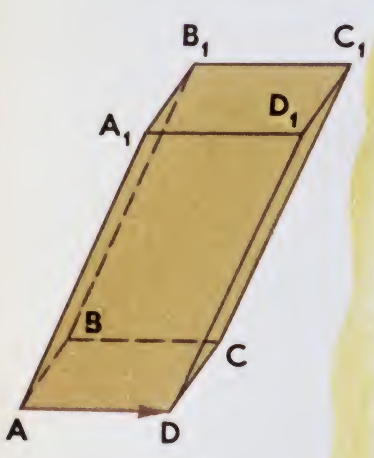


1. Найдите на рисунке параллелепипеды.
2. Докажите, что все грани параллелепипеда—параллелограммы.



ТЕОРЕМА.

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Докажем, что грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1 параллельны и равны.

1. $AB \parallel A_1B_1$, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $C_1D_1 \parallel CD$.

⇓

Грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1 **параллельны.**

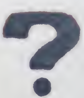
2. $AB = A_1B_1 = C_1D_1 = CD$; $AB \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1 \parallel CD$.

⇓

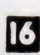
Грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1 совмещаются параллельным переносом.

⇓

Грани ABB_1A_1 и CDD_1C_1 **равны.**

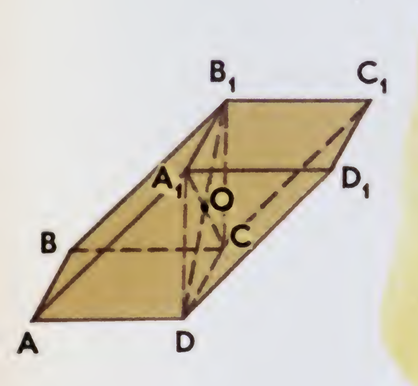


Объясните каждый шаг доказательства.



ТЕОРЕМА.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. $A_1B_1 \parallel CD$.

$\Downarrow$

A_1B_1 и CD лежат в одной плоскости.

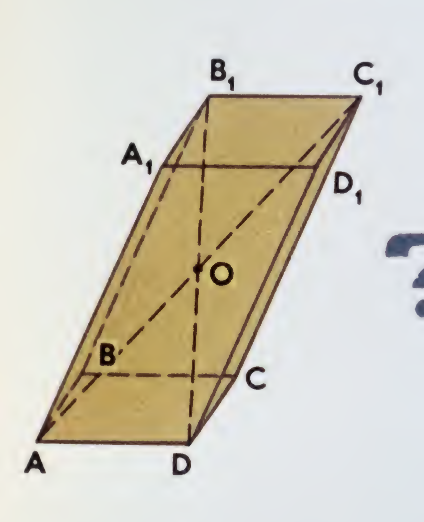
2. $A_1D \parallel B_1C$.

$\Downarrow$

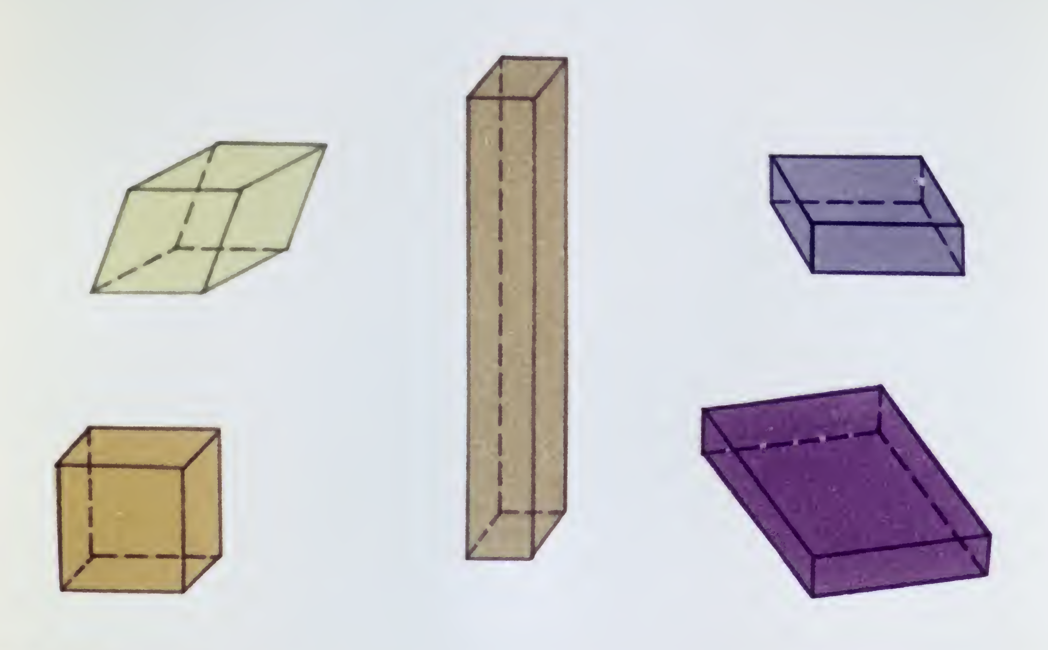
A_1B_1CD — параллелограмм.

3. A_1C и B_1D пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Обоснуйте каждый шаг приведенного рассуждения и объясните, почему этого рассуждения достаточно для доказательства теоремы.



Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.



Найдите прямые и прямоугольные параллелепипеды. Как называется прямоугольный параллелепипед с равными измерениями?

ТЕОРЕМА.

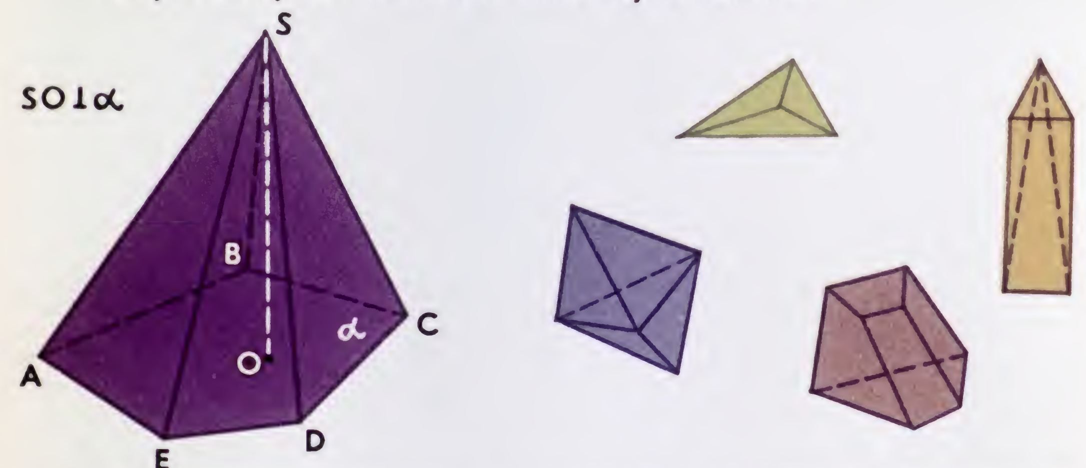
В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.



Докажите теорему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

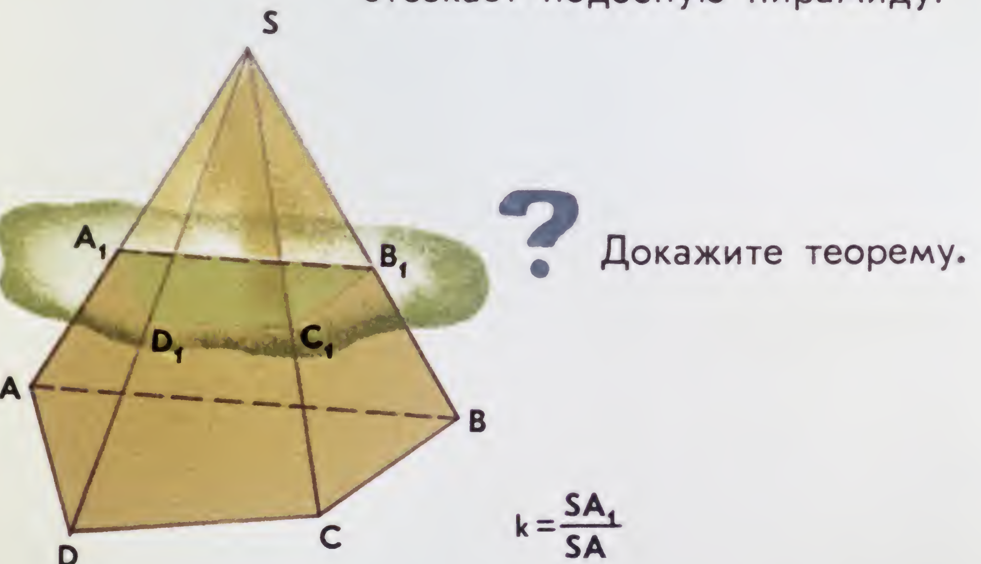
! **Пирамида** — это многогранник, состоящий из плоского многоугольника, точки, не лежащей в плоскости этого многоугольника, и всех отрезков, соединяющих эту точку с точками многоугольника.



? Найдите на рисунке пирамиды. Назовите основание, вершину, боковые грани, боковые ребра, высоту пирамиды SABCDE.

ТЕОРЕМА.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.

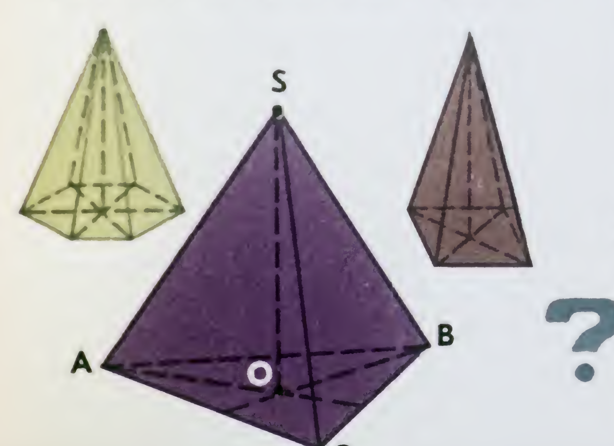


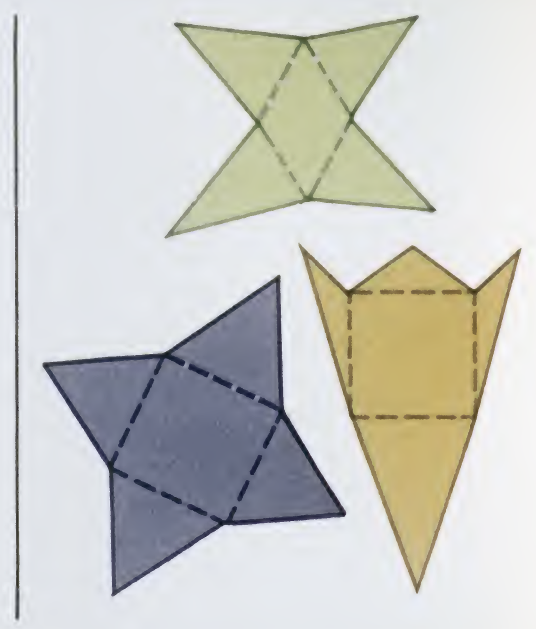
Докажите теорему.

$$k = \frac{SA_1}{SA}$$

Это — **правильные** пирамиды: основание — правильный многоугольник, основание высоты совпадает с центром многоугольника.

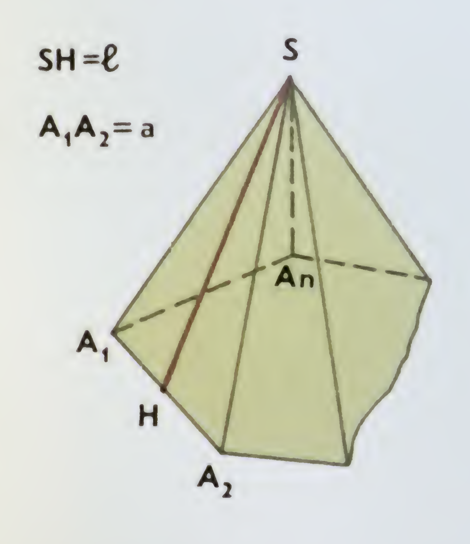
Верно ли, что все боковые ребра правильной пирамиды равны? А боковые грани?





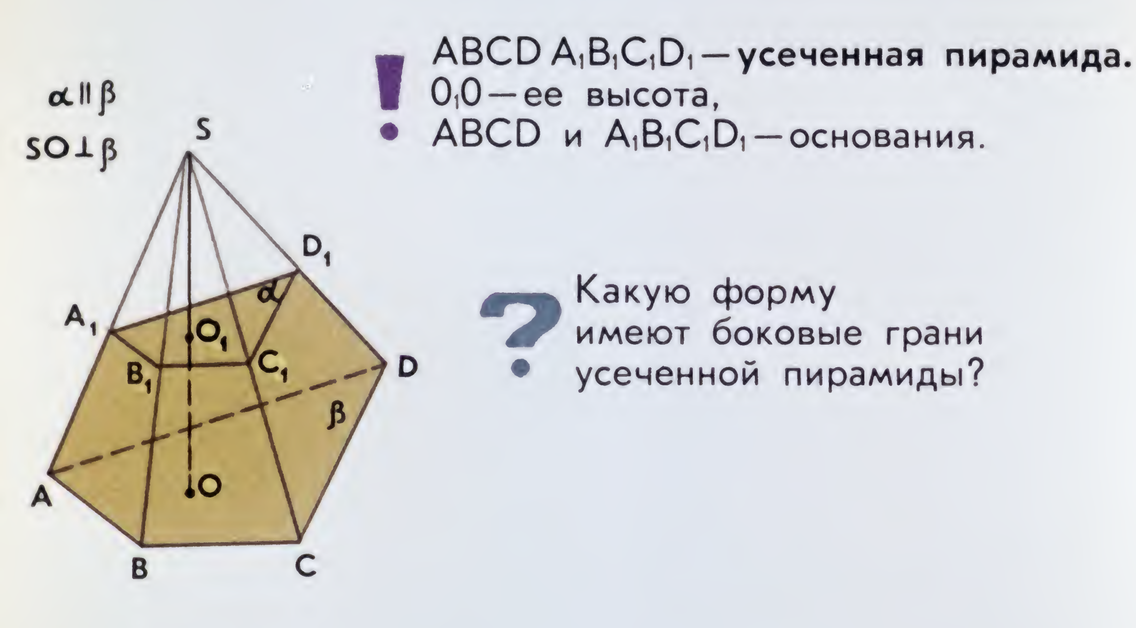
Какой многоугольник служит разверткой правильной пирамиды?

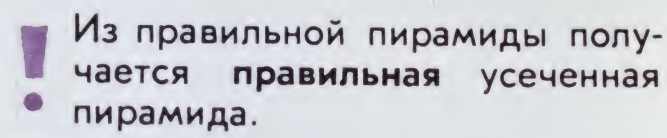
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой.** Докажите следующую теорему.



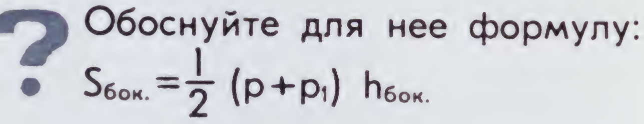
ТЕОРЕМА.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.


$ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида.
O_1O — ее высота,
$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания.
Какую форму имеют боковые грани усеченной пирамиды?
$\alpha \parallel \beta$
$SO \perp \beta$
S
D_1
A_1
O_1
C_1
B_1
D
α
β
A
O
B
C

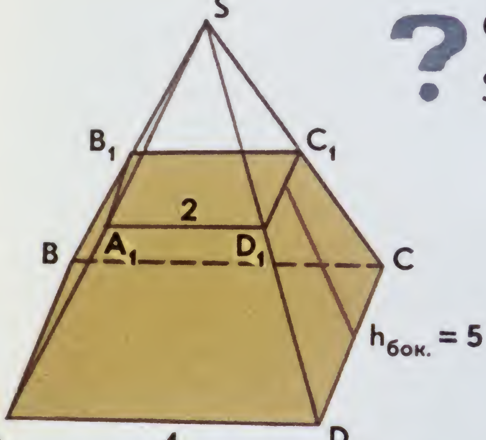


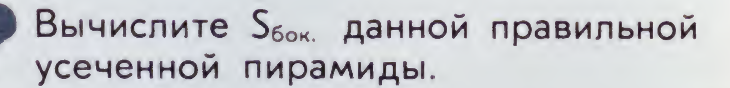
Из правильной пирамиды получается **правильная** усеченная пирамида.



Обоснуйте для нее формулу:

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}(p + p_1)\ h_{бок.}$$





Вычислите $S_{бок.}$ данной правильной усеченной пирамиды.

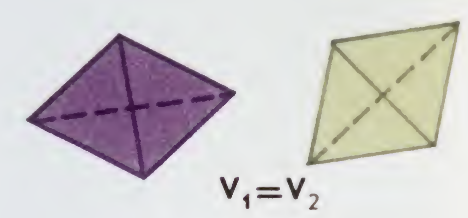
Существует 5 выпуклых правильных многогранников.



Какую форму имеют грани и сколько ребер сходится в каждой вершине этих многогранников?

F—многоугольник, V (F)—его объем.

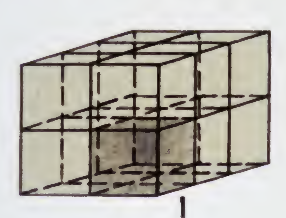
1. $(F_1 = F_2) \Rightarrow (V(F_1) = V(F_2))$.



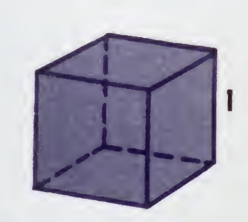
2. ($F = F_1 \cup F_2$, F_1 и F_2 не имеют общих внутренних точек)

$$\Downarrow$$

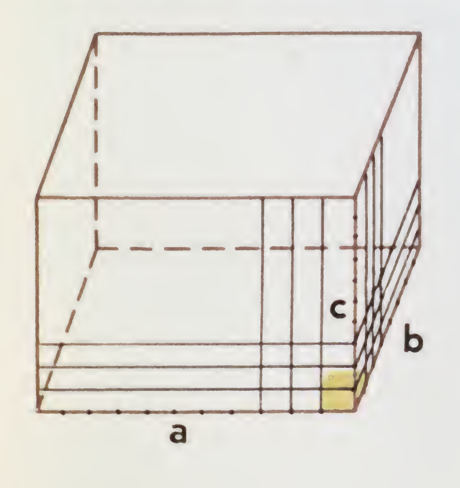
$(V(F) = V(F_1) + V(F_2))$.



3. (F—единичный куб) $\Rightarrow$ $(V(F) = 1)$.

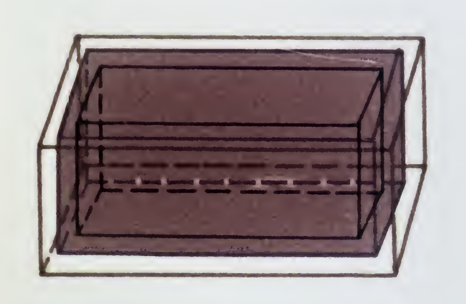


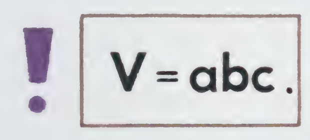
Найдем объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c, где a, b, c — конечные десятичные дроби с числом знаков после запятой не более n.

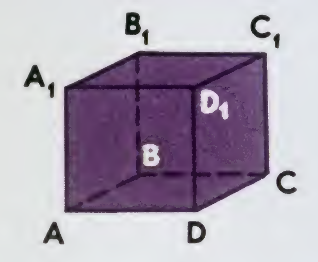


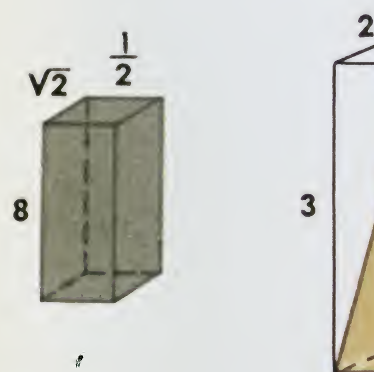
1. Делим ребра на 10^n равных частей; проводим через точки деления плоскости, параллельные граням.
2. Объем малого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$; этих кубов $abc \cdot 10^{3n}$.
3. Значит, $V = abc$.

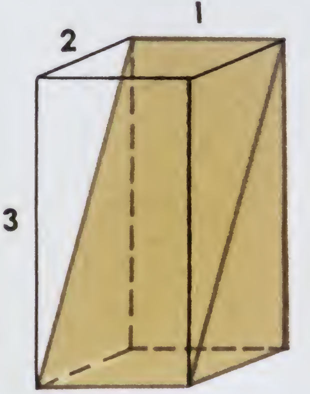
Если длины ребер выражаются бесконечными десятичными дробями, их можно заменить приближенными значениями с любой наперед заданной точностью $\frac{1}{10^n}$ (с недостатком и с избытком). Тогда объем будет заключен между объемами прямоугольных параллелепипедов, измерения которых — конечные десятичные дроби. Увеличивая точность приближения, приходим к выводу, что всегда:

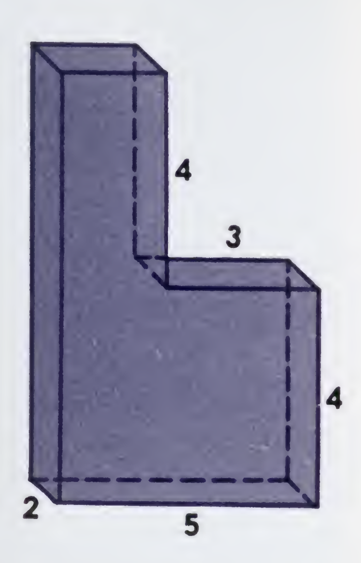




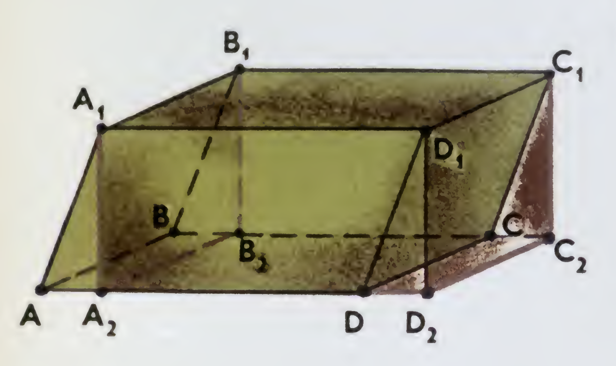






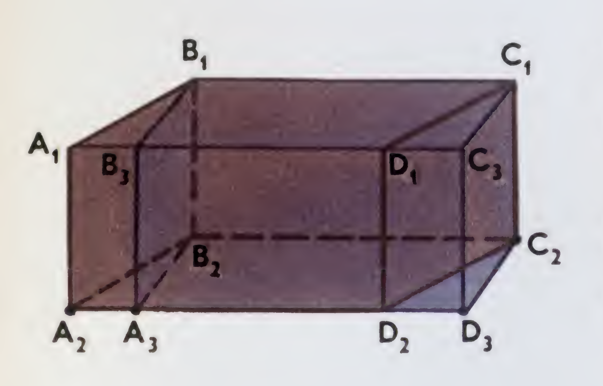


? Пользуясь формулой объема прямоугольного параллелепипеда, вычислите объемы данных многогранников.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед.
Плоскость $A_1B_1B_2A_2 \perp ABCD$, плоскость $D_1C_1C_2D_2 \perp ABCD$.

? Докажите, что $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — параллелепипед, имеющий тот же объем, ту же площадь основания и ту же высоту, что и данный параллелепипед.



Таким же образом превратим параллелепипед

$A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$

в параллелепипед

$A_3B_2C_2D_3B_3B_1C_1C_3$,

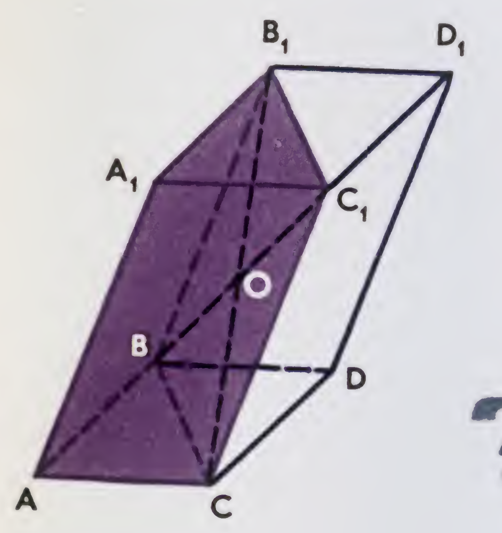
являющийся прямым, а его — в прямоугольный параллелепипед.



Объясните, почему

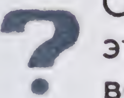
объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Найдем объем V треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Дополним призму до параллелепипеда с центром симметрии 0. Тогда

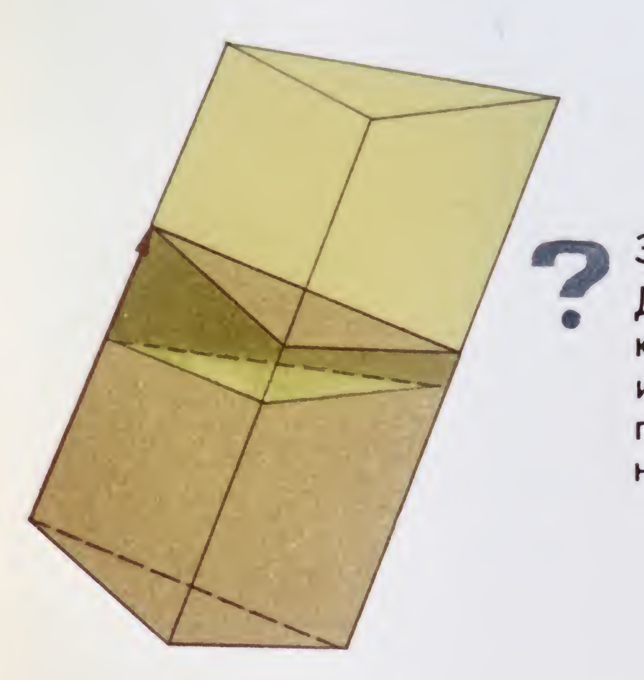
$$V = \frac{1}{2} V_{AD_1}$$



Объясните, почему объем этой призмы равен произведению площади основания на высоту.

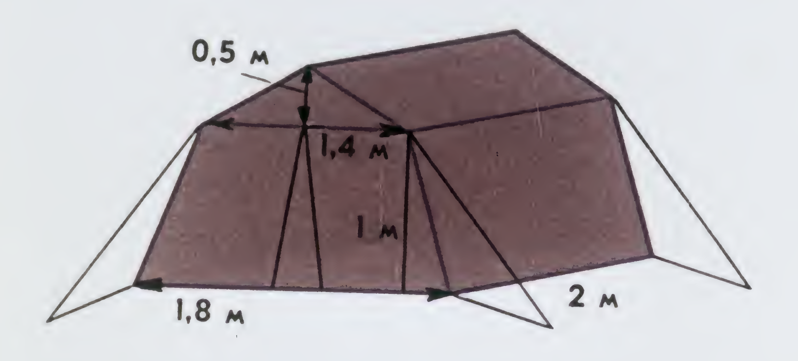


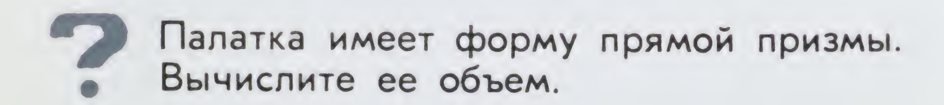
? Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади основания на высоту.



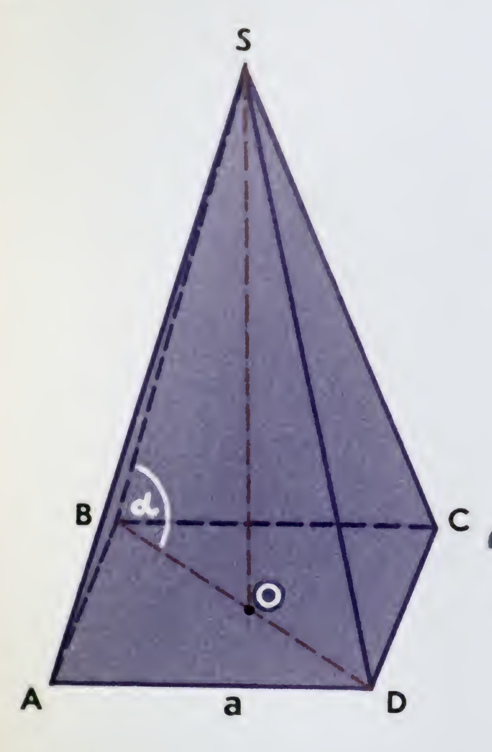
ЗАДАЧА.

Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.





Палатка имеет форму прямой призмы. Вычислите ее объем.



Можно доказать, что объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

! $$V = \frac{1}{3}SH$$

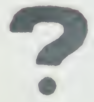
? Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды SABCD.

$SO = H.$

$SO_1 = H_1.$

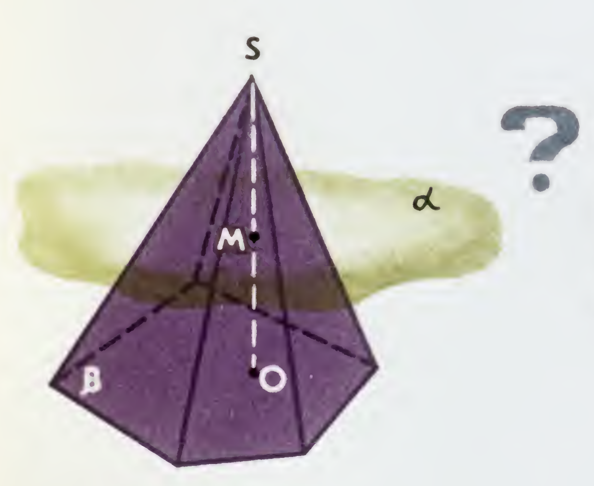
$S_{\triangle ABC} = Q.$

$S_{\triangle A_1B_1C_1} = Q_1.$



Вычислите объем каждого многогранника.

Можно доказать, что отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.



ЗАДАЧА.

SO — высота, SM = MO, α ∥ β. В каком отношении плоскость α делит объем пирамиды?

КОНЕЦ





Диафильм создан по программе
средней общеобразовательной школы

Автор Е. Арутюнян

Художник-оформитель И. Ищенко

Редактор И. Кремень

103062, Москва, Старосадский пер., 7

Цветной

Д-150-88